Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2010
École Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2010

Épreuve de Mathématiques I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE I

Pour tout réel λ, on considère la fonction $f_\lambda\,:\;\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\; x\longmapsto x+\lambda\dfrac{x^2+1}{e^x}$ et l'on note Γ_λ le graphe de f_λ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que par tout point (x_0, y_0) du plan $\mathbb{R}^2$ passe une courbe Γ_λ et une seule ; la préciser à l'aide de x_0 et y_0.
2. Étudier les branches infinies de Γ_λ pour tout λ.
3. Étudier la concavité et déterminer les points d'inflexion de Γ_λ pour tout λ.
4. (a) Tracer le graphe de la fonction $x\longmapsto\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer en fonction de λ le nombre de points où Γ_λ admet une tangente horizontale.
   (c) Déterminer et représenter le lieu I de ces points quand λ parcourt $\mathbb{R}$.
5. Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout λ, on note $T_{\lambda,a}$ la tangente à Γ_λ au point $(a, f_\lambda(a))$. Montrer que si $a\neq 1$, les droites $T_{\lambda,a}$, λ décrivant $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées. Que peut-on dire si $a=1$?
6. Dresser les tableaux de variation de f_{-2}, f_3 et f_7. Représenter sur une même figure I, Γ_0, Γ_{-2}, Γ_3, Γ_7 ainsi que les tangentes $T_{-2,0}$, $T_{3,0}$ et $T_{7,0}$.
   On prendra $\dfrac{5\sqrt{e}}{4}\approx 2,1$, $\dfrac{2}{e}\approx 0,75$, $\dfrac{10}{e^3}\approx 0,5$ et $\dfrac{e^3}{4}\approx 5$.
7. Établir une équation différentielle dont l'ensemble des solutions soit $\{f_\lambda;\ \lambda\in R\}$ et en préciser la nature. Comment peut-on interpréter la première question de l'exercice du point de vue de cette équation ?

EXERCICE II

Pour tout entier naturel n, on note P_n la fonction polynomiale définie par

$$P_n(x)=1+x+\cdots+x^{2n},\ x\in\mathbb{R}.$$

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que pour tout réel $x\neq 1$, $P_n(x)=\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}$.
   (b) Déterminer alors les racines complexes de P_n.

2. Quels sont les réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

3. Soit n un entier naturel non nul ; on pose $\varphi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

   (a) Préciser les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et celles de $P'_n(1)$, $P'_n(-1)$.

   (b) Pour $x \neq 1$, exprimer $P'_n(x)$ en fonction de $\varphi_n(x)$.

   (c) Étudier les variations de la fonction φ_n sur $\mathbb{R}$ et en déduire celles de P_n ; on résumera la situation dans un tableau de variations de ces deux fonctions.

   (d) En déduire qu'il existe une unique valeur $\alpha_n \in]-1, 0[$ en laquelle la fonction P_n prend une valeur minimale β_n et que $\beta_n > 0$.

4. Soit n un entier $\geqslant 2$. Dessiner dans un même graphique les courbes représentatives des fonctions P_n, P_{n+1} ainsi que celle de la fonction $]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$; on précisera les positions relatives de ces courbes et notamment leur points d'intersection.

5. (a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel α que l'on déterminera.

   (b) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $P'_n(\alpha_n) = 0$ et déterminer un équivalent de $(\alpha_n - \alpha)$ en $+\infty$.

   (c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (d) Étudier de même la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Pour tout couple $u = (x, y)$ de réels, on considère la fonction f_u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_u(t) = \frac{x + ty}{P_1(t)}.$$

   (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction f_u est bornée. On pose alors

$$N(u) = \sup\{|f_u(t)|\ ;\ \ t \in \mathbb{R}\}.$$

   (b) Construire l'ensemble S des points $u \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $N(u) = 1$.

   (c) Déterminer le plus grand réel positif a tel que

$$aN((x, y)) \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (d) Déterminer de même le plus petit réel positif b tel que

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant bN((x, y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

EXERCICE III

A. Intégrale de Gauss

1. (a) Justifier que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, n]$, $e^{-u} - (1 - \frac{u}{n})^n \geqslant 0$.

2. (a) Justifier que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0, 1]$, $(1-t)^n e^{nt} \geqslant (1-t^2)^n$.

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0, 1]$, $(1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2$.

   (d) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, n]$, $e^{-u} - (1 - \frac{u}{n})^n \leqslant \frac{u^2}{n} e^{-u}$.

3. (a) Étudier les variations de la fonction $h\ :\ t \longmapsto t^4 e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle y est bornée ; on fera un tableau de variation.

(b) Montrer que la suite de terme général $\int_0^{\sqrt{n}} \left(e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right) dt$ converge vers 0. (On pourra utiliser les résultats des questions 1. et 2. précédentes.)

(c) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; on justifiera d'abord la convergence de cette intégrale.

4. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\sqrt{\pi}$.

B. Calcul d'une transformée de Fourier

On note f la fonction

$$f \,:\, t \mapsto e^{-t^2}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto e^{-ixt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}\, y = 0. \qquad (1)$$

3. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\hat{f}$.

FIN DE L'ÉPREUVE